ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Β΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2021-22
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ

ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Γ037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: 90 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε ΟΛΑ τα ερωτήματα.**
3. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο απαντήσεων.
4. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για σχήματα, πίνακες, διαγράμματα κλπ.
6. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής η οποία πρέπει να φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
8. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
9. Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

<u>ΜΕΡΟΣ Α:</u> Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις του Μέρους Α.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^4 (x^3 + e^x - 8)dx$$

Α2. (α) Να δείξετε ότι $\forall \nu \epsilon \mathbb{N}$,

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} (6\kappa^2 - 2\kappa) = 2\nu^2(\nu + 1)$$ (3μ)

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=1}^{24} (6\kappa^2 - 2\kappa)$$ (2μ)

Α3. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 8x$.
(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας της παραβολής και την εξίσωση της διευθετούσας της. (2μ)
(β) Να βρείτε την τιμή του $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η ευθεία με εξίσωση $y = x + c$ να εφάπτεται της παραβολής. (3μ)

Α4. (α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, όπου $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x + 2,\ x \in \mathbb{R}$ (2μ)
(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον άξονα των τετμημένων. (3μ)

Α5. Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους 4 διαφορετικά χρυσόψαρα μπορούν να τοποθετηθούν σε 5 αριθμημένες γυάλες ($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$), αν:
(α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός (2μ)
(β) τα 4 χρυσόψαρα θα τοποθετηθούν σε διαφορετικές γυάλες (2μ)
(γ) τα 4 χρυσόψαρα θα τοποθετηθούν σε ακριβώς 3 γυάλες. (1μ)

Α6. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με εστίες τα σημεία $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$ και τυχαίο σημείο της $T(\alpha\text{συνθ}, \beta\text{ημθ}), 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$.
Η περίμετρος του τριγώνου ETE' είναι ίση με 16 μονάδες.
(α) Να βρείτε τις τιμές των α και β. (1,5μ)
(β) Αν $\alpha = 5$ και $\beta = 4$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο T είναι η

$$(\varepsilon)\colon 4x\text{συνθ} + 5y\text{ημθ} = 20$$ (1,5μ)

(γ) Η εφαπτομένη (ε) τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο Γ και τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο Δ. Αν O η αρχή των αξόνων, να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $O\Gamma\Delta$ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{20}{\eta\mu 2\theta}$ (1μ)

(δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου T έτσι ώστε το πιο πάνω εμβαδόν να είναι ίσο με $\frac{40}{\sqrt{3}}$ τ.μ. (1μ)

<u>ΜΕΡΟΣ Β</u>: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις του Μέρους Β.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1. Δίνονται τα ολοκληρώματα

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sigma\upsilon\nu x}{1+e^x} dx \quad \text{και} \quad B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x} dx$$

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = -u$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι $A = B$ (4μ)

(β) Να δείξετε ότι $A + B = 2$ (4μ)

(γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα A. (2μ)

Β2. Δίνεται το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Να υπολογίσετε το πλήθος των τριψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία του συνόλου Ω, χωρίς επανάληψη ψηφίου, αν αυτοί:

(α) είναι περιττοί (3μ)

(β) αρχίζουν με το ψηφίο 4 (3μ)

(γ) είναι περιττοί και αρχίζουν με το ψηφίο 4 (3μ)

(δ) είναι περιττοί ή αρχίζουν με το ψηφίο 4. (1μ)

Β3. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και τυχαίο σημείο της $T(t^2, 2t)$, $t \neq 0$.

(α) Η ευθεία (ε_1) διέρχεται από την εστία E της παραβολής και είναι κάθετη στην OT (όπου O η αρχή των αξόνων). Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε_1) είναι η

$$(\varepsilon_1) : y = -\frac{t}{2}(x-1)$$ (3μ)

(β) Η ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο $A(-1,0)$ και είναι παράλληλη με την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο T. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε_2) είναι η

$$(\varepsilon_2): y = \frac{1}{t}(x+1)$$ (4μ)

(γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής Σ των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι έλλειψη, της οποίας να βρείτε την εκκεντρότητα. (3μ)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

1. Στατιστική

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}{\nu}} \text{ ή } s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa}f_i(x_i-\bar{x})^2}{\nu}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa}f_i{x_i}^2}{\nu}-\bar{x}^2},$$

$$\text{όπου } \nu=\sum_{i=1}^{\kappa}f_i$$

$$r=\frac{\Sigma_{xy}-\nu\bar{x}\bar{y}}{\nu S_x S_y}\text{, όπου } \Sigma_{xy}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_\nu y_\nu$$

2. Τριγωνομετρία

$\eta\mu(A\pm B)=\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B\pm\sigma\upsilon\nu A\eta\mu B$

$\sigma\upsilon\nu(A\pm B)=\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\mp\eta\mu A\eta\mu B$

$2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta=\eta\mu(\alpha-\beta)+\eta\mu(\alpha+\beta)$

$2\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu B=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$

$2\,\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$

$\eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$ $\qquad$ $\sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha$

$\eta\mu^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$ $\qquad$ $\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$

$\eta\mu2\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$ $\qquad$ $\sigma\upsilon\nu2\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\qquad$ $t=\varepsilon\varphi\alpha$

$\eta\mu A+\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$

$\eta\mu A-\eta\mu B=2\,\eta\mu\frac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$

$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\,\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$

$\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B=2\,\eta\mu\frac{B-A}{2}\eta\mu\frac{A+B}{2}$

Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	**Σε ακτίνια**
$\eta\mu x=\eta\mu\alpha$	$x=360^o\kappa+\alpha$ ή $x=360^o\kappa+180^o-\alpha,\quad \kappa\in\mathbb{Z}$	$x=2\pi\kappa+\alpha$ ή $x=2\pi\kappa+\pi-\alpha,\quad \kappa\in\mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\alpha$	$x=360^o\kappa\pm\alpha,\quad \kappa\in\mathbb{Z}$	$x=2\pi\kappa\pm\alpha,\quad \kappa\in\mathbb{Z}$
$\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\alpha$	$x=180^o\,\kappa+\alpha,\quad \kappa\in\mathbb{Z}$	$x=\pi\kappa+\alpha,\quad \kappa\in\mathbb{Z}$

3. Γεωμετρία

Ορθό πρίσμα	$E\pi \;= \Pi_\beta . \upsilon$	$V = E_\beta . \upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$E_\pi = \frac{1}{2}\Pi_\beta \cdot h$	$V = \frac{E_\beta . \upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_\kappa = 2\pi R\upsilon$	$V = \pi R^2\upsilon$
Κώνος	$E_\kappa = \pi R\lambda$	$V = \frac{\pi R^2\upsilon}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_\kappa = \pi(R+\rho)\lambda$	$V = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$

4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου $A(x_1, y_1)$ από την ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

΄Ελλειψη

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \alpha > \beta$

Εστίες ($\pm$ γ,0), Διευθετούσες $x = \pm\frac{\alpha}{\varepsilon}$, Εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$

5. Παράγωγοι

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ $\quad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ $\quad (\varepsilon\varphi x)' = \tau\varepsilon\mu^2 x$ $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

6. Ολοκληρώματα

$\int \tau\varepsilon\mu x \, dx = \ln|\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x| + c$ $\quad \int \sigma\tau\varepsilon\mu x \, dx = \ln\left|\varepsilon\varphi \frac{x}{2}\right| + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \tau o\xi\eta\mu \frac{x}{\alpha} + c$ $\quad \int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha}\tau o\xi\varepsilon\varphi \frac{x}{\alpha} + c$

7. Απλός Τόκος $T = \frac{K.E.X}{100}$